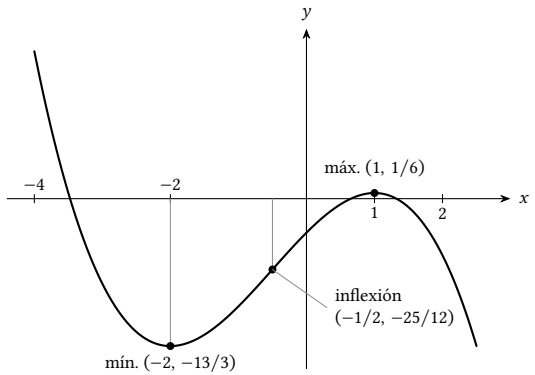
E.2C · Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

Ejercicio 2C.6.1

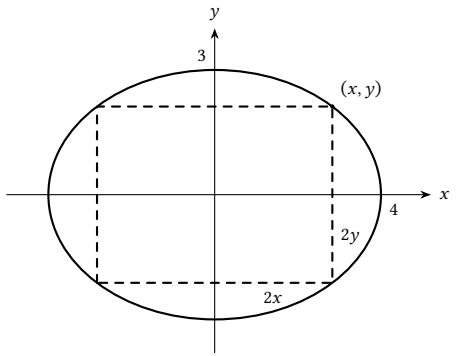
← volver

1. Dominio $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2 - x - x^2 = -(x^2 + x - 2) = -(x+2)(x-1)$. Críticos: $x = -2$ y $x = 1$.
2. a) $-(x+2)(x-1)$ es positivo entre las raíces y negativo fuera: decreciente en $(-\infty, -2)$, creciente en $(-2, 1)$, decreciente en $(1, \infty)$.
3. b) $f''(x) = -1 - 2x$, cero en $x = -\frac{1}{2}$: $f'' > 0$ si $x < -\frac{1}{2}$ (cóncava hacia arriba) y $f'' < 0$ si $x > -\frac{1}{2}$ (hacia abajo). Inflexión: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{25}{12}$.
4. c) En $x = -2$, f' pasa de − a + y $f''(-2) = 3 > 0$: mínimo relativo $f(-2) = -1 - 4 - 2 + \frac{8}{3} = -\frac{13}{3}$. En $x = 1$, de + a − y $f''(1) = -3 < 0$: máximo relativo $f(1) = -1 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
5. Para la gráfica: $f(0) = -1$, $f(-4) = \frac{13}{3}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx -4.33$.



Ejercicio 2C.6.2

← volver



3. Impropia (Parte 3C): $\lim_{b\to\infty}\left[-(b+1)e^{-b}+1\right] = 0+1$, porque $\frac{b+1}{e^b} \to 0$ (L'Hôpital, Parte 2B).
4. **La integral converge y vale 1.**

E.4B · Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

Ejercicio 4B.6.1

← volver

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{3}.$$
2. $|x-4|<3 \Rightarrow 1<x<7$. Centro 4, radio 3.
3. $x=7$: $\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$, serie p con $p=2$: converge.
4. $x=1$: $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, que converge absolutamente por el paso anterior.
5. **Intervalo de convergencia:** $1 \le x \le 7$.

Ejercicio 4B.6.2

← volver

1. Es alternada con $b_n = \frac{1}{n+\sqrt[n]{7}} = 7^{-1/(n+1)} > 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 7^0 = 1 \neq 0$: no se cumple la segunda condición de Leibniz.
3. Además b_n crece (el exponente $-\frac{1}{n+1}$ aumenta hacia 0), así que tampoco decrece.
4. Los términos $a_n = (-1)^{n+1}b_n$ oscilan cerca de 1 y -1: $\lim a_n$ no existe.
5. **La serie diverge por el criterio del término *n*-ésimo.**

Ejercicio 4B.6.3

← volver

1. $0.777\ldots = \frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.
2. Geométrica con $a=\frac{7}{10}$ y $r=\frac{1}{10}$; como $|r|<1$, converge.
3. Suma: $\dfrac{7/10}{1-1/10} = \dfrac{7/10}{9/10} = \dfrac{7}{9}$.
4. **Converge y** $0.777\ldots = \frac{7}{9}$**.** Comprobación: $9\cdot 0.777\ldots = 7.000\ldots$

Ejercicio 4B.6.4

← volver

1. Simplifica: $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Derivadas: $f' = \frac{1}{3}(1+x)^{-1}$, $f'' = -\frac{1}{3}(1+x)^{-2}$, $f''' = \frac{2}{3}(1+x)^{-3}$. En general,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3(1+x)^n},$$
y $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3}$, con $f(0)=0$.
3. Coeficiente: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$.
4. $\ln\sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{9}-\ldots$, que es un tercio de la serie de $\ln(1+x)$ (sección 4B.4) y converge en $(-1,1]$.

1. **Variables.** La recta corta los ejes en $(a,0)$ y $(0,b)$, con $a,b>0$; su ecuación es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
2. **Restricción.** Pasa por $(2,3)$: $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \Rightarrow b=\frac{3a}{a-2}$, con $a>2$ para que $b>0$.
3. **Función objetivo:** $A = \frac{ab}{2} = \frac{3a^2}{2(a-2)}$, $a>2$.
4. **Crítico:**
$$A'(a) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2a(a-2)-a^2}{(a-2)^2} = \frac{3a(a-4)}{2(a-2)^2} = 0 \Rightarrow a=4.$$
5. **Justificación:** para $2<a<4$, $A'<0$; para $a>4$, $A'>0$: mínimo.
6. $b=\frac{12}{2}=6$ y $A=\frac{4\cdot 6}{2}=12$. La recta es $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$, y $(2,3)$ es el punto medio del segmento entre los ejes.

Ejercicio 2C.6.5

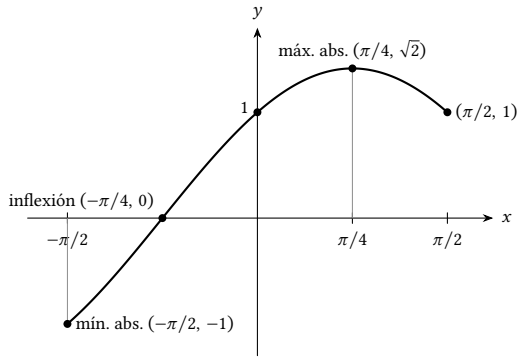
← volver

1. A está en la gráfica: $g(1)=a+b=2$.
2. Inflexión en $x=1$: $g''(x)=6ax+2b$ y $g''(1)=6a+2b=0$, es decir, $b=-3a$.
3. Sustituyendo: $a-3a=2 \Rightarrow a=-1$ y $b=3$.
4. Comprobación: $g(x)=-x^3+3x^2$, $g''(x)=-6x+6$ cambia de + a − en $x=1$, y $g(1)=2$. Es inflexión.

Ejercicio 2C.6.6

← volver

1. a) $m'(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$, que existe siempre. $m'(x)=0 \iff \tan x=1$; en $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ la única solución es $x=\frac{\pi}{4}$.
2. b) m es continua en el intervalo cerrado (teorema de Weierstrass). Valores:
$$m\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=-1, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}, \qquad m\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1.$$
Máximo absoluto $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{4}$; mínimo absoluto -1 en $-\frac{\pi}{2}$.
3. c) $m''(x)=-\operatorname{sen} x-\cos x=-m(x)$; se anula donde $\tan x=-1$: $x=-\frac{\pi}{4}$. Para $x<-\frac{\pi}{4}$, $m<0$ y $m''>0$ (cóncava hacia arriba); para $x>-\frac{\pi}{4}$, $m''<0$ (hacia abajo). Inflexión en $\left(-\frac{\pi}{4}, m\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$.
4. d) Además $m(0)=1$. La gráfica sube de $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ a $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ y baja a $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.



3. Integral cíclica: $I = x\,\mathrm{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I$, de donde $2I = x\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big]$.
4. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$. Comprobación:

$$\tfrac{1}{2}\big[\,\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + \tfrac{1}{2}\big[\,\cos(\ln x) + \mathrm{sen}(\ln x)\big] = \mathrm{sen}(\ln x)$$

Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. Partes con $u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$I = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x \ln x\,\mathrm{d}x$$

2. Partes otra vez, con $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

3. $\int x(\ln x)^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$. Comprobación: $x(\ln x)^2 + x\ln x - x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x(\ln x)^2$.

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. Se desarrolla el cuadrado y se usa $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$(\tan x - \sec x)^2 = 2\sec^2 x - 1 - 2\sec x\tan x$$

2. Las tres son inmediatas: $\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x$, $\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sec x$.
3. $\int(\tan x - \sec x)^2\mathrm{d}x = 2\tan x - 2\sec x - x + C$. Comprobación: $2\sec^2 x - 2\sec x\tan x - 1 = \tan^2 x - 2\sec x\tan x + \sec^2 x$.

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. $\frac{1}{\sec(x^2)} = \cos(x^2)$. Con $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$:

$$I = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}^2 u\cos u\,\mathrm{d}u$$

2. Potencia impar del coseno (exponente 1): $w = \mathrm{sen}\,u$, $\mathrm{d}w = \cos u\,\mathrm{d}u$; $\frac{1}{2}\int w^2\mathrm{d}w = \frac{1}{6}w^3$.
3. $\int \frac{x\,\mathrm{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,\mathrm{sen}^3(x^2) + C$. Comprobación: $\frac{1}{6}\cdot 3\,\mathrm{sen}^2(x^2)\cos(x^2)\cdot 2x = x\,\mathrm{sen}^2(x^2)\cos(x^2)$.

Ejercicio 4A.6.5 ← volver

1. El cuadrado ya está completo: $u = x + 3$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, y queda $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+9)^{3/2}}$.
2. Raíz de $u^2 + a^2$ con $a = 3$: $u = 3\tan\theta$, $\mathrm{d}u = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{u^2+9} = 3\sec\theta$.

$$I = \int \frac{3\sec^2\theta}{27\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}\,\mathrm{sen}\,\theta + C$$

3. $2 - 2\sqrt{1-b} = 1 \Rightarrow \sqrt{1-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$.
4. $b = \frac{3}{4} < 1$: el integrando es continuo en $[0, \frac{3}{4}]$.
5. $b = \frac{3}{4}$.

Ejercicio 3A.6.4 ← volver

1. Con $u = \mathrm{sen}\,x$, $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$: $\int e^{\mathrm{sen}\,x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\mathrm{sen}\,x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\mathrm{sen}\,x} = e^{\mathrm{sen}\,x}\cos x$.
2. $\int_0^{\pi/2} e^{\mathrm{sen}\,x}\cos x\,\mathrm{d}x = e^{\mathrm{sen}(\pi/2)} - e^{\mathrm{sen}\,0} = e - 1$.
3. $\bar{f} = \dfrac{e-1}{\pi/2} = \dfrac{2(e-1)}{\pi}$.

Ejercicio 3A.6.5 ← volver

1. En $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \geq 0$, así que $|\tan x| = \tan x$.
2. Con $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C.$$

   Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln\cos x) = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$.
3. $\int_0^{\pi/4}\tan x\,\mathrm{d}x = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.
4. **a)** $\bar{f} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2}{\pi/4} = \dfrac{2\ln 2}{\pi}$.
5. **b)** $\tan c = \frac{2\ln 2}{\pi} \Rightarrow c = \mathrm{ang\,tan}\,\frac{2\ln 2}{\pi} \approx 0.416$, que está en $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \approx [0,\ 0.785]$.

Ejercicio 3A.10.1 · Sumas por la derecha y por la izquierda ← volver

1. $\Delta x = \frac{1}{4}$; puntos $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.
2. Derecha: $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}\right) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.
3. Izquierda: $\frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$.
4. $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Como f es creciente en $[0,1]$, la suma por la derecha la sobrestima y la de la izquierda la subestima: $\frac{7}{32} < \frac{1}{3} < \frac{15}{32}$.

Ejercicio 3A.10.2 · La suma por la derecha con cien rectángulos ← volver

1. $S_{100} = \frac{101\cdot 201}{6\cdot 10\,000} = \frac{20\,301}{60\,000} = \frac{6767}{20\,000} = 0.33835$.
2. $S_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$.
3. Es $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$: con 100 rectángulos el error es menor que 0.006.

E.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

Ejercicio 3B.6.1 ← volver

1. **Variables.** Por simetría, el vértice del primer cuadrante es (x, y), con lados $2x$ y $2y$.
2. **Función objetivo:** $A = 4xy$. **Restricción:** el vértice está en la elipse, $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.
3. **Una variable:** $A(x) = 3x\sqrt{16 - x^2}$, con $0 < x < 4$.
4. **Crítico:**

$$A'(x) = 3\sqrt{16 - x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{3(16 - 2x^2)}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{2}.$$

5. **Justificación:** el numerador $3(16 - 2x^2)$ pasa de positivo a negativo en $x = 2\sqrt{2}$: máximo. (Además $A \to 0$ en los extremos $x = 0$ y $x = 4$.)
6. $y = \frac{3}{4}\sqrt{8} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Lados: $2x = 4\sqrt{2}$ y $2y = 3\sqrt{2}$.
7. Resultado: $A = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$ unidades de área (en general, $2ab$).

Ejercicio 2C.6.3 ← volver

1. **Restricción.** Volumen: área del triángulo por la longitud, $\frac{L^2}{2}h = 3 \;\Rightarrow\; h = \frac{6}{L^2}$.
2. **Función objetivo.** Dos triángulos de área $\frac{L^2}{2}$; dos rectángulos $L \times h$ (los catetos) y uno $\sqrt{2}L \times h$ (la hipotenusa):

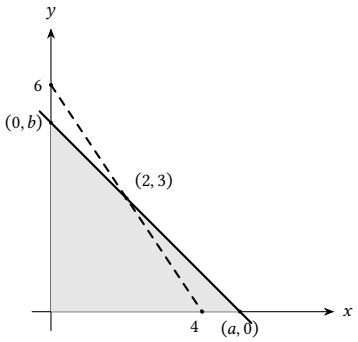
$$S = L^2 + (2 + \sqrt{2})Lh = L^2 + \frac{6(2 + \sqrt{2})}{L}, \qquad L > 0.$$

3. **Crítico:**

$$S'(L) = 2L - \frac{6(2 + \sqrt{2})}{L^2} = 0 \;\Rightarrow\; L^3 = 3(2 + \sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}.$$

4. **Justificación:** $S''(L) = 2 + \frac{12(2+\sqrt{2})}{L^3} > 0$: mínimo.
5. $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}} \approx 2.17$ m. Como $L^3 = 3(2 + \sqrt{2})$, $h = \frac{6}{L^2} = \frac{6L}{L^3} = \frac{2L}{2+\sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2})L \approx 1.27$ m.
6. Si la cara de la hipotenusa quedara abierta, $S = L^2 + \frac{12}{L}$ y el mínimo estaría en $L = \sqrt[3]{6}$ m.

Ejercicio 2C.6.4 ← volver



Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. Como $(x - 1)^2 = (1 - x)^2$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Serie conocida: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Derivando término a término:

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n.$$

3. Por derivadas da lo mismo: $g^{(n)}(0) = \frac{(n+1)!}{2}$, y $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n+1}{2}$.
4. $g(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $-1 < x < 1$. Comprobación: $g(0) = \frac{1}{2}$, que es el primer término.

Ejercicio 4B.10.1 · Una serie con logaritmo ← volver

1. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ es continua, positiva y decreciente en $[2, \infty)$ (el denominador crece).
2. Con $u = \ln x$: $\displaystyle\int_2^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^b = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \to \infty$.
3. **La serie diverge**, por el criterio de la integral. (El cociente da $L = 1$ y no decide.)

Ejercicio 4B.10.2 · Una serie con exponencial ← volver

1. $f(x) = xe^{-x^2}$ es continua y positiva; $f'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) < 0$ para $x \geq 1$: es decreciente.
2. Con $u = x^2$: $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_1^b = 0 + \frac{1}{2e}$.
3. **La serie converge.**

Ejercicio 4B.10.3 · El error de la aproximación del péndulo ← volver

1. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$ Para $x = 0.1$ es una serie alternada cuyos términos decrecen a cero: cumple Leibniz.
2. Al cortar en x, el primer término omitido es $\frac{x^3}{6} = \frac{0.001}{6} \approx 1.67 \times 10^{-4}$: el error es menor que eso.
3. El error verdadero es $0.1 - \operatorname{sen} 0.1 \approx 1.666 \times 10^{-4}$, justo debajo de la cota.

Ejercicio 2C.10.1 · Terreno junto a un río ← volver

1. Variables: x, los dos lados perpendiculares al río, y y, el lado paralelo. Restricción: $2x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 2x$.
2. Objetivo: $A(x) = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$, con dominio $0 < x < 120$.
3. Crítico: $A'(x) = 240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$. Como $A''(x) = -4 < 0$, es un máximo.
4. $y = 240 - 120 = 120$ y $A = 60 \cdot 120 = 7200\ \text{m}^2$.

Ejercicio 2C.10.2 · La caja de volumen máximo ← volver

1. $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$.
2. En $(0, 15)$, $30 - 2x > 0$; el único crítico es $x = 5$.
3. Signo de V': positivo en $(0, 5)$ y negativo en $(5, 15)$. Por el criterio de la primera derivada, $x = 5$ es un máximo.
4. $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000\ \text{cm}^3$.

E.3A · Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

Ejercicio 3A.6.1 ← volver

1. $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$, $f(x_i) = 2 + \frac{2i}{n}$.
2. Suma de Riemann:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \frac{4}{n}\,n + \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 4 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = 4 + 2 = 6$.
4. Comprobación: $\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_1^3 = \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$.
5. $\int_1^3 (x + 1)\,\mathrm{d}x = 6$.

Ejercicio 3A.6.2 ← volver

1. $f(t) = \cos t$; límite superior $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$; límite inferior $h(x) = x$, $h'(x) = 1$.
2. TFC: $F'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x - \cos x \cdot 1$.
3. Comprobación: $F(x) = \operatorname{sen} t\big|_x^{x^2} = \operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen} x$, cuya derivada es $2x\cos(x^2) - \cos x$.
4. $F'(x) = 2x\cos(x^2) - \cos x$.

Ejercicio 3A.6.3 ← volver

1. Con $u = 1 - x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-2\sqrt{1-x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. $\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^b = 2 - 2\sqrt{1-b}$.

3. Triángulo: opuesto u, adyacente 3, hipotenusa $\sqrt{u^2+9}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+9}}$.
4. $I = \frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$. Comprobación (en u): $\frac{1}{9}\cdot\frac{(u^2+9)-u^2}{(u^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{(u^2+9)^{3/2}}$.

Ejercicio 4A.6.6 ← volver

1. $u = e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$: $I = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u-1)}$, racional.
2. $\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$, es decir, $1 = A(u^2+1) + (Bu+C)(u-1)$.
3. Con $u = 1$: $A = \frac{1}{2}$. Coeficiente de u^2: $A + B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Término independiente: $A - C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.
4. Integrando: $\frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} u$.
5. $I = \frac{1}{2}\ln|e^x - 1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$. Comprobación (en u):

$$\frac{1}{2(u-1)} - \frac{u+1}{2(u^2+1)} = \frac{(u^2+1)-(u^2-1)}{2(u-1)(u^2+1)} = \frac{1}{(u-1)(u^2+1)}$$

Ejercicio 4A.6.7 ← volver

1. Raíz de $x^2 + a^2$ con $a = 2$: $x = 2\tan\theta$, $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2+4} = 2\sec\theta$.
2. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta\cdot 2\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C \end{aligned}$$

3. Triángulo: opuesto x, adyacente 2, hipotenusa $\sqrt{x^2+4}$; $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$. Comprobación:

$$-\frac{1}{4x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

Ejercicio 4A.6.8 ← volver

1. Se cambia toda la raíz: $u = \sqrt{e^{2x}-1}$, $u^2 = e^{2x} - 1$, $2u\,\mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x$, así que $\mathrm{d}x = \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \operatorname{ang\,tan} u + C$$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$. Comprobación: $\frac{1}{1+(e^{2x}-1)}\cdot\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Ejercicio 4A.10.1 · Partes en una integral impropia ← volver

1. Partes con $u = x$, $\mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = -e^{-x}$.
2. $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$. Comprobación: $\left[-(x+1)e^{-x}\right]' = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}$.

1. Cortes: $4x^3 = 8x^2 \Rightarrow 4x^2(x-2)=0$, así que $x=0$ (raíz doble: las curvas se tocan) y $x=2$.
2. En $x=1$: $8x^2 = 8 > 4 = 4x^3$; arriba está la parábola.
3. $A = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{8}{3}x^3 - x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{3} - 16$.
4. $A = \frac{16}{3}\,[u^2]$.

Ejercicio 3B.6.2 ← volver

1. Región: entre el eje y y la curva $x = y^3$, para $0 \le y \le 1$. Toca el eje de giro.
2. Discos horizontales de radio $R = y^3$: $V = \pi \int_0^1 y^6 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{7}$.
3. Comprobación con capas: $2\pi \int_0^1 x\left(1 - x^{1/3}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$.
4. $V = \frac{\pi}{7}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.3 ← volver

1. El sólido es como un tronco de cono curvo: radio 1 en $x=0$ y $\frac{1}{2}$ en $x = \ln 2$. Discos verticales de radio $R = e^{-x}$.
2. $V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\mathrm{d}x = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$.
3. $V = \frac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

Ejercicio 3B.6.4 ← volver

1. $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 6\theta$; $r^2 + (r')^2 = 9\theta^4 + 36\theta^2 = 9\theta^2(\theta^2+4)$.
2. Con $\theta \ge 0$, la raíz es $3\theta\sqrt{\theta^2+4}$: $L = \int_0^{\pi} 3\theta\sqrt{\theta^2+4}\,\mathrm{d}\theta$.
3. Con $u = \theta^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 2\theta\mathrm{d}\theta$: $L = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_4^{\pi^2+4} = (\pi^2+4)^{3/2} - 8$.
4. $L = (\pi^2+4)^{3/2} - 8\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta^2+4)^{3/2} = 3\theta\sqrt{\theta^2+4}$.

Ejercicio 3B.6.5 ← volver

1. $f'(x) = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{x}$; $[f'(x)]^2 = 4x$.
2. $L = \int_0^{1/4} \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}x$. Con $u = 1+4x$: $L = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.
3. $L = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{6}(1+4x)^{3/2} = \sqrt{1+4x}$.

Ejercicio 3B.10.1 · El mismo resorte, en un tramo ← volver

1. $W = \int_{0.2}^{0.4} 50x\,\mathrm{d}x = 25x^2\Big|_{0.2}^{0.4} = 25(0.16 - 0.04)$.
2. $W = 25(0.12) = 3$ **J.** Es más que el trabajo de 0 a 0.2 (1 J): el resorte se resiste más mientras más se estira.

Ejercicio 3B.10.2 · Vaciar un tanque cilíndrico ← volver

1. Eje y vertical, con $y=0$ en el fondo. La capa a la altura y, de grosor $\mathrm{d}y$, tiene volumen $\pi(1)^2\mathrm{d}y$ y peso $\rho g\pi\,\mathrm{d}y = 9810\pi\,\mathrm{d}y$ newtons.
2. Esa capa sube $3-y$ metros hasta el borde: su trabajo es $9810\pi(3-y)\,\mathrm{d}y$.

3. Suma de todas las capas:

$$W = 9810\pi \int_0^3 (3-y)\,\mathrm{d}y = 9810\pi\left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 9810\pi \cdot \frac{9}{2}.$$

4. $W = 44\,145\pi$ **J** $\approx 138\,686$ **J.**

E.3C · Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

Ejercicio 3C.6.1 ← volver

1. En $x=5$ el denominador se anula y $\ln(x-5) \to -\infty$: $\int_5^6 = \lim_{t\to 5^+}\int_t^6$.
2. Con $u = \ln(x-5)$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$:

$$\int \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\ln^2(x-5) + C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{1}{4}\ln^2(x-5)\right]' = \frac{\ln(x-5)}{2(x-5)}$.
3. Evaluación: $\lim_{t\to 5^+}\left[\frac{1}{4}\ln^2 1 - \frac{1}{4}\ln^2(t-5)\right] = 0 - \infty$.
4. **La integral diverge.**

Ejercicio 3C.10.1 · Una exponencial decreciente ← volver

1. $\int_0^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}\,\mathrm{d}x$; antiderivada $-\frac{1}{2}e^{-2x}$.
2. $\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}$.
3. **La integral converge y vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 3C.10.2 · Una integral p que diverge ← volver

1. $\int_1^b x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_1^b = 2\sqrt{b} - 2$.
2. $\lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b} - 2\right) = \infty$.
3. **La integral diverge.** Coincide con el criterio p: $p = \frac{1}{2} \le 1$.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. Partes con $u = \operatorname{sen}(\ln x)$, $\mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$:

$$I = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con $u = \cos(\ln x)$, $v = x$:

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cos(\ln x) + I$$